גוף קשיח

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי 1
2. וקטורים 8
3. מרכז מסה 26
4. מומנט כוח (סטטיקה של גוף קשיח) 32
5. מומנט התמד 41
6. גוף קשיח 44

גוף קשיח

פרק 1 - מבוא מתמטי

תוכן העניינים

1. מעברי יחידות 1
2. סינוס קוסינוס ומה שביניהם 3
3. צפיפות 7

מעברי יחידות:

שאלות:

1) **דוגמה 1**

נתון: $A=2km$, $B=10gr$.

מצא את $C=A\cdot B$ ביחידות של m.k.s.

2) **דוגמה 2**

נתון: $A=2m^2$, $B=3gr$, $C=5c.m\cdot s$

חשב את הגדלים הבאים ביחידות של m.k.s:

א. $D=2\cdot A$

ב. $E=\dfrac{5\cdot B\cdot C}{A}$

3) **מעבר יחידות בחזקות**

מצא את הגדלים הבאים ביחידות של ס"מ:

א. $A=1m^2$

ב. $B=1m^3$

4) **סנטימטר בשלישית**

הבע את הערכים הנ"ל ביחידות של $c.m^3$:

א. $5.2m^3$

ב. $320mm^3$

ג. $0.0054km^3$

5) **ליטר, דוגמה**

הבע את הגדלים הבאים ב- Liter:

א. $5m^3$

ב. $5mm^3$

תשובות סופיות:

1) $20m \cdot kg$

2) א. $4m^2$ ב. $37.5 \cdot 10^{-5} \dfrac{sec \cdot kg}{m}$

3) א. $10^4 cm^2$ ב. $10^6 cm^3$

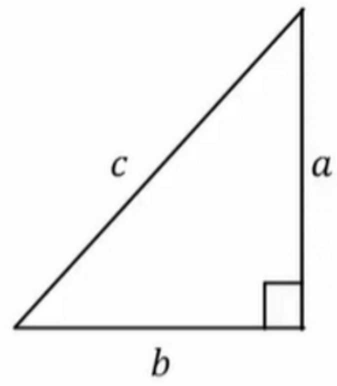
4) א. $5.2 \cdot 10^6 cm^3$ ב. $0.32 cm^3$ ג. $5.4 \cdot 10^{12} cm^3$

5) א. $5 \cdot 10^3 Liter$ ב. $5 \cdot 10^{-6} Liter$

סינוס קוסינוס ומה שביניהם:

רקע

במשולש ישר זווית:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{יתר}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{יתר}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{ניצב שמול}}{\text{ניצב ליד}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{ניצב ליד}}{\text{ניצב שמול}} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

זהויות:

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$ $\cot(90^\circ-\alpha)=\tan\alpha$	$90^\circ-\alpha$
$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha$ $\cot(90^\circ+\alpha)=-\tan\alpha$	$90^\circ+\alpha$
$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$	$180^\circ-\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$-\alpha$
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha==1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$	2α
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	$\alpha\pm\beta$

סכום והפרש של פונקציות:

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ערכים ששווה לזכור:

הזווית\הפונקציה	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	לא מוגדר

פתרונות עבור:

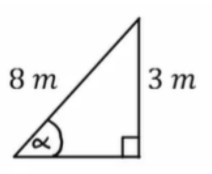
$x_1=\alpha+2\pi k$ $x_2=\pi-\alpha+2\pi k$	$\sin x=\sin\alpha$
$x_1=\alpha+2\pi k$ $x_2=-\alpha+2\pi k$	$\cos x=\cos\alpha$
$x=\alpha+\pi k$	$\tan x=\tan\alpha$

שאלות:

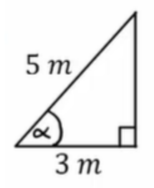
1) דוגמה 1-חישוב אלפא

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:

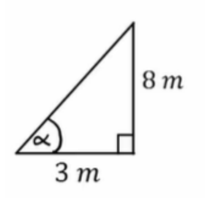
א.



ב.



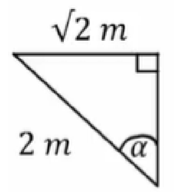
ג.



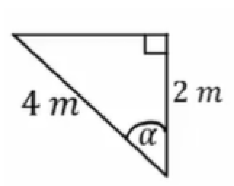
2) דוגמה 2-משולשים שמסורטטים אחרת

חשב את הזווית אלפא במקרים הבאים:

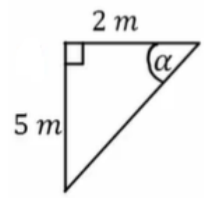
א.



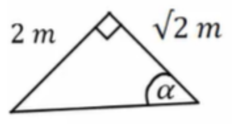
ב.



ג.

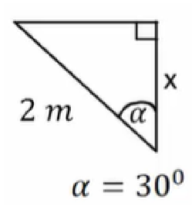


ד.

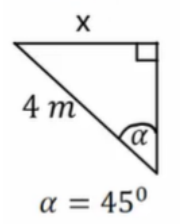


3) דוגמה-2-מציאת ניצבים

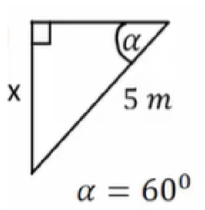
א.



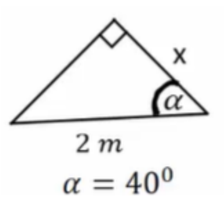
ב.



ג.



ד.



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 22^\circ$ ב. $\alpha = 53^\circ$ ג. $\alpha = 69^\circ$

2) א. $\alpha = 45^\circ$ ב. $\alpha = 60^\circ$ ג. $\alpha = 68.2^\circ$ ד. $\alpha = 55^\circ$

3) א. $\sqrt{3m}$ ב. $2\sqrt{2m}$ ג. $\frac{5\sqrt{3m}}{2}$ ד. $1.53m$

צפיפות:

שאלות:

1) דיסקה עם חור

א. מצא את הצפיפות של דיסקה בעלת רדיוס R ומסה M?

ב. בדיסקה קדחו חור ברדיוס r.
מצא את המסה שהוצאה מהדיסקה.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{M}{\pi R^2}$ ב. $M\left(\frac{r}{R}\right)^2$

גוף קשיח

פרק 2 - וקטורים

תוכן העניינים

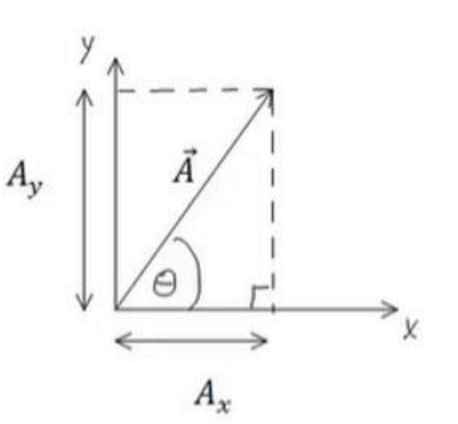
1. הגדרות ופעולות בסיסיות 8
2. מכפלה סקלרית 12
3. ----- 17
4. וקטור בשלושה מימדים 19
5. מכפלה וקטורית בשלושה מימדים 22

הגדרות ופעולות בסיסיות:

רקע:

הצגת וקטור באמצעות גודל וכיוון נקראת הצגה פולרית.
הצגת וקטור באמצעות רכיבי ה- x וה- y נקראת הצגה קרטזית.

פירוק וקטור לרכיבים:



היטל על ציר ה- x או רכיב ה- x של A:
$A_x = |\vec{A}|\cos\theta$.
היטל על ציר ה- y או רכיב ה- y של A:
$A_y = |\vec{A}|\sin\theta$.
המעבר ההפוך: $\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$, $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$.

כפל בסקלר:

$$\vec{B} = \alpha\vec{A} = \alpha\left(A_x, A_y\right) = \left(\alpha A_x, \alpha A_y\right)$$

שאלות:

1) חיבור וחיסור בקרטזי

נתונים שלושה וקטורים: $\vec{C}(3,5)$, $\vec{B}(4,2)$, $\vec{A}(1,3)$.

א. חשבו את: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$.

ב. חשבו את: $\vec{A}-\vec{B}-\vec{C}$.

ג. חשבו את: $2\vec{A}+3\vec{B}-4\vec{C}$.

2) חיבור וקטורים בפולרי

נתונים שני וקטורים בהצגה הפולרית:

הוקטור $\vec{A}$ שגודלו 10 והזווית שלו עם ציר ה-x היא $30°$.

הוקטור $\vec{B}$ שגודלו 8 והזווית שלו עם ציר ה-x היא $60°$.

מצאו את $\vec{A}+\vec{B}$.

3) עוד חיבור בפולרי

נתונים שני וקטורים:

הוקטור $\vec{A}$ שגודלו 10 וכיוונו $30°$,

הוקטור $\vec{B}$ שגודלו לא ידוע וכיוונו $350°$.

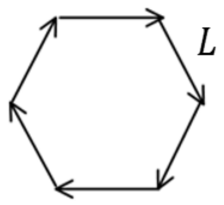
מהו גודלו של הוקטור $\vec{B}$ אם נתון שסכום הוקטורים ייתן וקטור ללא רכיב בציר ה-y?

4) משושה של וקטורים

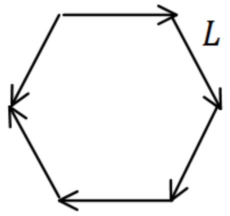
שישה וקטורים בגודל L כל אחד יוצרים משושה שווה צלעות.

מצאו את הוקטור השקול (גודל וכיוון) בכל אחד מהמקרים הבאים:

א.



ב.



5) וקטור בין שתי נקודות

הוקטור $\vec{A}$ הוא וקטור מהנקודה (x_1, y_1, z_1) אל הנקודה (x_2, y_2, z_2).
רשום ביטוי לרכיבים של הוקטור ומצא את גודלו.

6) חיבור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$.
גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא: $\theta_A = 130^\circ$.
גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא: $\theta_B = 60^\circ$.
שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את $\vec{A}+\vec{B}$ באמצעות שיטת המקבילית.

7) חיסור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים $\vec{A}$ ו-$\vec{B}$.
גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא $\theta_A = 130^\circ$.
גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה-x החיובי היא $\theta_B = 60^\circ$.
שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את $\vec{A}-\vec{B}$ באמצעות שיטת המקבילית.

8) מציאת אורך של שקול

אורכם של שני וקטורים הוא 5 ו-10 ס"מ.
הזווית ביניהם היא 30 מעלות.
מהו אורכו של הוקטור השקול שלהם (סכום הוקטורים)?

9) מציאת זווית בין שני וקטורים

נתונים שני וקטורים שאורכם 10 ו-13 מטר.
אורך השקול שלהם הוא 20 מטר.
מצא את הזווית בין הוקטורים.

תשובות סופיות:

1) א. $(8,10)$ ב. $(-6,-4)$ ג. $(2,-8)$

2) $(12.7,11.9)$

3) 28.8

4) $L\cdot 4\cos(30)$

5) $\vec{A}=(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1\ ,\ z_2-z_1)$, $|\vec{A}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

6) $C=10.1\ ,\ \theta_c=108.1°$

7) $C=7.62\ ,\ \theta_c=159.5°$

8) $|\vec{a}|=14.6\text{c.m}$

9) $\theta=60°$

מכפלה סקלרית:

רקע:

שתי דרכים לביצוע המכפלה:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x\cdot B_x + A_y\cdot B_y$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha$$

α - זווית בין הוקטורים.

<u>תכונות המכפלה</u>:

- תוצאת המכפלה היא תמיד סקלר (ולא וקטור).
- מכפלה בין וקטורים מאונכים מתאפסת (זו דרך לבדוק האם וקטורים מאונכים)
- מכפלה סקלרית של וקטור בעצמו נותנת את גודל הוקטור בריבוע $\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|^2$
- פתיחת סוגרים והעלאה בריבוע:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$(\vec{A}+\vec{B})^2 = |\vec{A}|^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + |\vec{B}|^2$$

נוסחה למציאת זווית בין שני וקטורים: $\cos\alpha = \frac{A_xB_x + A_yB_y}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$.

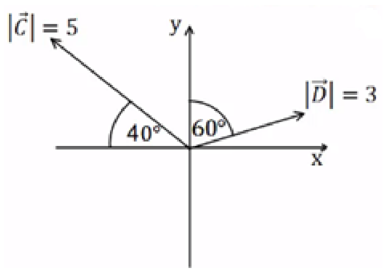
שאלות:

1) דוגמה 1

מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית בין הוקטורים הנתונים בכל המקרים הבאים:

א. $\vec{A} = (-1,2)\ ,\ \vec{B}(2,2)$

ב.



2) דוגמה 2

בדוק עבור זוגות הוקטורים הבאים האם הם מאונכים:

א. $\vec{A}=(1,4)\ ,\ \vec{B}=(-2,5)$

ב. $\vec{A}=(1,4)\ ,\ \vec{B}=(8,-2)$

ג. $\vec{A}=(-1,-2)\ ,\ \vec{B}=(-2,1)$

ד. שרטט כל זוג וקטורים מאונכים על מערכת צירים, חשב את זוויות הוקטורים עם הצירים והראה שהזווית בין הוקטורים היא אכן 90°.

3) דוגמה 3

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A}=(-3,1)\ ,\ \vec{B}=(2,-4)$.

א. מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. מצא את המכפלה הסקלרית שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בקוסינוס הזווית. בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א'.

4) דוגמה 4

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A}=(-3,1)\ ,\ \vec{B}=(2,-4)$.

א. הראה כי החישוב של $\vec{A}\cdot\vec{B}$ זהה לחישוב $\vec{B}\cdot\vec{A}$.

ב. הוכח בצורה כללית כי המכפלה הסקלרית היא פעולה קומוטטיבית. (הדרכה: רשום את הוקטורים בצורה כללית עם נעלמים).

5) דוגמה 5

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A}=(2,1)\ ,\ \vec{B}(-3,2)\ ,\ \vec{C}=(1,-3)$.

חשב את:

א. $\vec{A}\cdot\vec{C}$

ב. $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$

ג. $\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$

ד. $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$

ה. $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$

ו. $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\cdot\vec{B}$

ז. $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$

6) דוגמה 6

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{C}=(1,5)$, $\vec{B}(1,-3)$, $\vec{A}=(-2,2)$.

חשב את:

א. $\dfrac{(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{|\vec{B}|^2}$

ב. $\dfrac{(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{C}}{|\vec{C}|^2}$

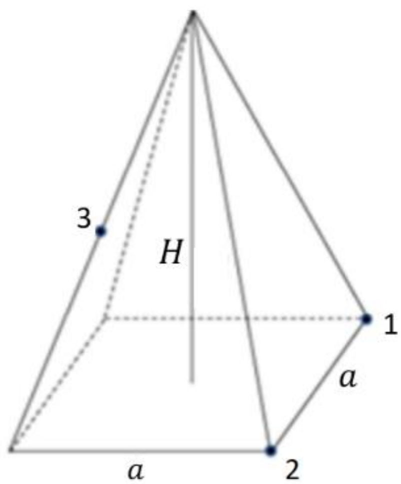
7) דוגמה 7

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{C}=(1,5)$, $\vec{B}(1,-3)$, $\vec{A}=(-2,2)$.

מצא את הזווית בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$ לבין $\vec{B}$ ל- $\vec{C}$.

8) פירמידה משוכללת*

באיור מתוארת פירמידה משוכללת שבסיסה ריבוע בעל אורך צלע a
וגובהה $H=2a$. נקודה 3 באיור נמצאת באמצע הצלע שבין הפינה לקודקוד.
נגדיר שני ווקטורים:
הווקטור $\vec{A}$ יוצא מנקודה 1 לנקודה 2.
הווקטור $\vec{B}$ יוצא מנקודה 1 לנקודה 3.
מהי הזווית בין שני הווקטורים?

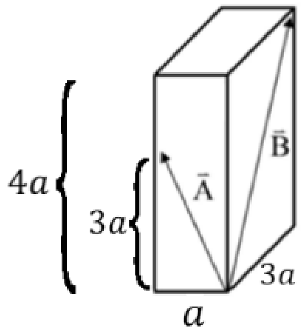


9) היטלים של וקטורים בתוך תיבה

נתונה תיבה בעלת אורך צלעות: a, $3a$ ו- $4a$. נגדיר שני ווקטורים: $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ כמתואר באיור.

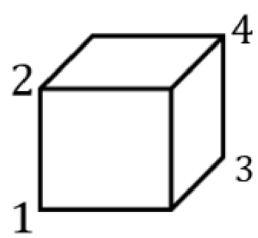
א. מהו היחס בין ההיטל של $\vec{A}$ על הכיוון של $\vec{B}$ (נסמנו - A_B) להיטל של $\vec{B}$ על הכיוון של $\vec{A}$ (נסמנו - B_A), $\frac{A_B}{B_A}$?

ב. חשבו את הזווית בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$.



10) היטל של אלכסון על אלכסון בקובייה

נתונה קובייה בעלת אורך צלע a, ראו איור.
מהו ההיטל של הווקטור המצביע מפינה 1 לפינה 4 על הציר המוגדר על ידי הכיוון מפינה 3 לפינה 2.

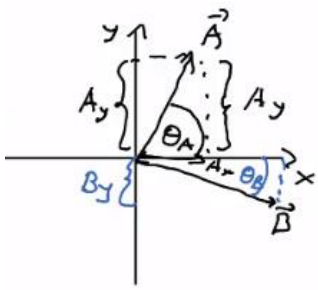


תשובות סופיות:

1) א. $\vec{A}\cdot\vec{B}=2$ ב. $\vec{C}\cdot\vec{D}=-5.13$

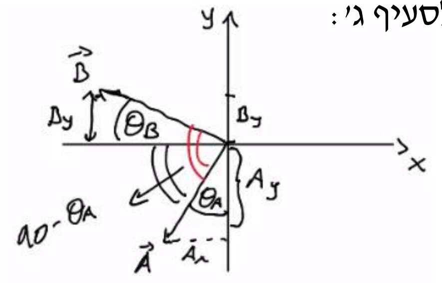
2) א. $\vec{A}$ לא מאונך ל- $\vec{B}$.   ב. הוקטורים מאונכים.   ג. הוקטורים מאונכים.

ד. לסעיף ב':



הזויות: $\theta_B=14.04°$, $\theta_A=75.96°$.

לסעיף ג':



הזוויות: $\theta_B=26.57°$, $\theta_A=26.57°$.

3) א. $\vec{A}\cdot\vec{B}=-10$ ב. $\theta_A=161.57°$, $|\vec{A}|=\sqrt{10}$, $\theta_B=-63.43°$, $|\vec{B}|=\sqrt{20}$

ג. $\vec{A}\cdot\vec{B}=-10$

4) א. שאלת הוכחה.   ב. שאלת הוכחה.

5) א. $\vec{A}\cdot\vec{C}=-1$ ב. $(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=-10$ ג. $\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}=-10$

ד. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}=(-4,12)$ ה. $\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})=(-18,-9)$ ו. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{B}=(12,-8)$

ז. $(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})=36$

6) א. $\dfrac{(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{|\vec{B}|^2}=\left(\dfrac{-8}{10},\dfrac{24}{10}\right)$ ב. $\dfrac{(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{C}}{|\vec{C}|^2}=(-0.54,-2.69)$

7) $\alpha_{\vec{A}\vec{B}}=153.43°$, $\alpha_{\vec{B}\vec{C}}=150.26°$

8) $59°$

9) א. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ב. $40.6°$

10) $-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

מכפלה וקטורית בדו מימד:

רקע:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\hat{z}$$

<u>הערות</u>:
התוצאה של המכפלה הוקטורית היא תמיד וקטור (בניגוד לסקלרית).

נוסחה נוספת לגודל של המכפלה הוקטורית:
$\vec{A}\times\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\sin\alpha$.

α - זווית הקטנה בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$.

שאלות:

1) דוגמה-מכפלה וקטורית

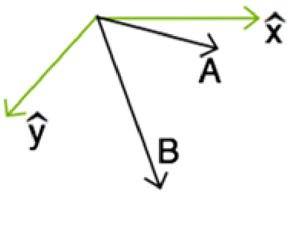
נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{B}(2,-3)$, $\vec{A}=(-4,1)$.

א. חשב את $\vec{A}\times\vec{B}$ באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.
מהו גודל המכפלה?

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. חשב את $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$ שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בסינוס הזווית. (בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א).

2) מכפלה סקלרית ווקטורית בפולרי



נתונה מערכת צירים כבשרטוט.
נתונים שני וקטורים:
גודל 10, זווית $\vec{A}-20$.
גודל 15, זווית $\vec{B}-60$.

א. חשב $A\cdot B$ (מכפלה סקלארית).

ב. חשב $A\times B$ (מכפלה וקטורית).

ג. הסבר מדוע המכפלה הוקטורית נותנת את שטח המקבילית שיוצרים הווקטורים.

תשובות סופיות:

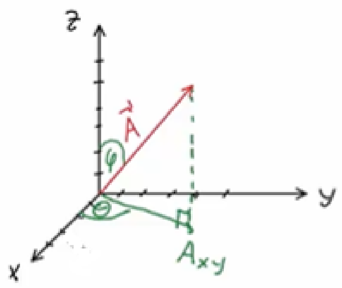
1) א. $\vec{A}\times\vec{B}=10\hat{z}$ וכן $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=10$.

ב. $\left|\vec{B}\right|=\sqrt{13}\ ,\ \theta_B=-56.31^\circ\ ,\ \left|\vec{A}\right|=\sqrt{17}\ ,\ \theta_A=165.96^\circ$ ג. $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=10$

2) א. $\vec{A}\cdot\vec{B}=150\cdot\cos(40)$ ב. $\vec{A}\times\vec{B}=-150\cdot\sin(40)\cdot\hat{z}$ ג. ראה סרטון.

וקטור בשלושה מימדים:

רקע:



$0 \le \varphi \le \pi$

$0 \le \theta \le 2\pi$

מציאת גודל הוקטור: $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

פירוק לרכיבים:

$A_z = \left|\vec{A}\right| \cos\varphi$.

$A_{xy} = \left|\vec{A}\right| \sin\varphi$.

$A_x = \left|\vec{A}\right| \sin\varphi \cos\theta$.

$A_y = \left|\vec{A}\right| \sin\varphi \sin\theta$.

שאלות:

1) חישוב וקטור יחידה

נתון הוקטור: $\vec{A}(2,3,4)$.

א. מהו גודלו של הוקטור?

ב. מהו וקטור היחידה של הוקטור $\vec{A}$?

2) חישוב גודל זווית בקרטזי

נתונים שני וקטורים: $\vec{B}(3,4,5)$, $\vec{A}(1,5,10)$.

א. מהו גודלו של כל וקטור?

ב. מהי הזווית בין שני הוקטורים?

3) מציאת שקול וזווית עם הצירים

שני כוחות נתונים פועלים על גוף: $\vec{B}(3,6,7)$, $\vec{A}(1,4,5)$.

א. מהו הכוח השקול?

ב. מהו גודלו של הכוח השקול?

ג. מהי הזווית בין הכוח השקול ובין כל אחד מהצירים?

4) וקטור בזווית 30 עם ציר Y - ספיר אפיק מעבר

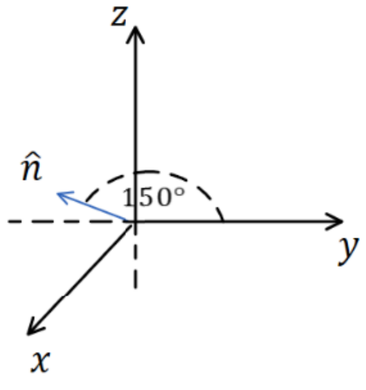
אילו מהווקטורים הבאים נמצא בזווית של $30°$ מציר y?

$$\vec{C}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \vec{B}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},1\right) \qquad \vec{A}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

5) היטל של A על 150 מעלות מציר y

נתון הווקטור: $\vec{A}=\hat{x}+\sqrt{3}\hat{y}+6\hat{z}$.

מהו ההיטל של הווקטור $\vec{A}$ על ציר $\hat{n}$ הנמצא במישור y-z וכיוונו החיובי מסובב בזווית של $150°$ מציר y נגד כיוון השעון?



6) שהסכום מאונך להפרש

הוכח- אם סכום של שני וקטורים מאונך להפרשם אזי אורכם שווה.

7) מציאת וקטור מאונך

נתונים 2 וקטורים : $\vec{B}(B_x,B_y,0)$, $\vec{A}(1,4,8)$.

מצא את מרכיבי וקטור B אם נתון כי הוא ניצב לוקטור A וגודלו 10.

תשובות סופיות:

1) א. $|A|=\sqrt{29}$ ב. $\hat{A}=\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{3}{\sqrt{29}},\frac{4}{\sqrt{29}}\right)$

2) א. $|\vec{A}|=\sqrt{126}$, $|\vec{B}|=\sqrt{50}$ ב. $\alpha=23°$

3) א. $\vec{C}=(4,10,12)$ ב. $|C|=\sqrt{260}$ ג. $\alpha=75.63$, $\beta=51.67$, $\gamma=41.90$

4) הווקטור C.

5) 1.5

6) שאלת הוכחה.

7) $\vec{B}=\left(-4\sqrt{\frac{100}{17}},\sqrt{\frac{100}{17}},0\right)$

מכפלה וקטורית בשלושה מימדים:

רקע:

שתי דרכים לביצוע המכפלה:

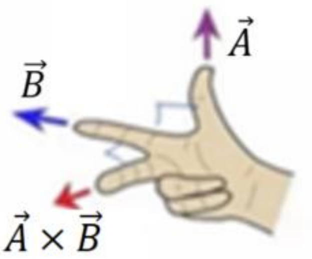
דרך 1 – דטרמיננטה:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

דרך 2 – לפי גודל וכיוון בנפרד:

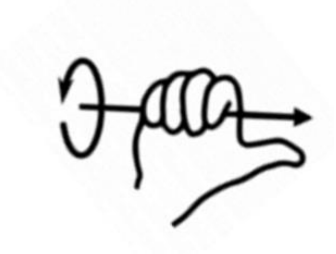
גודל המכפלה - $|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}||\sin\alpha|$

כיוון לפי כלל יד ימין -



יש כמה דרכים לבצע את הכלל, אם מחליפים אצבעות לכל שלושת הוקטורים הכלל נשאר נכון (אם מחליפים מקום רק לשני וקטורים – טעות).

דרך נוספת לכלל יד ימין נקראת כלל הבורג



מסובבים את האצבעות מ- $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$ והתוצאה בכיוון האגודל.

שאלות:

1) דוגמה - דטרמיננטה

נתונים הוקטורים הבאים :

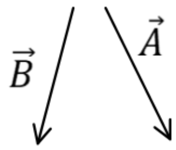
$\vec{A}(-1,2,-2)$, $\vec{B}(2,0,1)$

חשבו את $\vec{A} \times \vec{B}$.

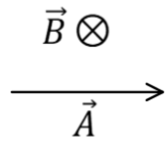
2) דוגמה - כלל יד ימין

מצאו את $\vec{A} \times \vec{B}$ במקרים הבאים :

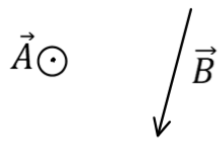
א.



ב.



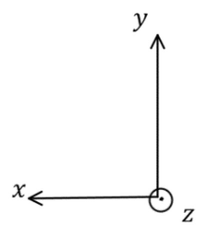
ג.



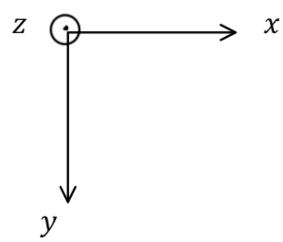
3) דוגמה - מערכות צירים

בדקו האם המערכות הבאות הן ימניות או שמאליות :

א.



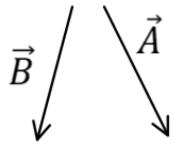
ב.



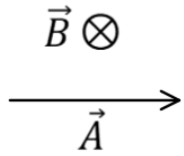
4) דוגמה - כלל הבורג

מצאו את $\vec{A}\times\vec{B}$ באמצעות כלל הבורג:

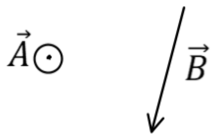
א. ג



ב. ע



ג.



5) מקבילון

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{a}=2\hat{x}-3\hat{y}+\hat{z}$, $\vec{b}=\hat{x}+2\hat{y}-\hat{z}$, $\vec{c}=2\hat{x}-\hat{y}$

מרכיבים מהוקטורים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ מקבילית ובוחרים את ראשית הצירים בקודקוד המקבילית (הנח כל היחידות בס"מ).

א. מצאו את מיקומו של הקודקוד שמול הקודקוד שבראשית הצירים.

ב. מצאו את אורכי האלכסונים של המקבילית.

ג. מצאו את שטח המקבילית.

ד. יוצרים מקבילון על ידי הוספת הוקטור $\vec{c}$ למקבילית.
חשבו את גובה המקבילון המאונך למקבילית.
רמז: השתמש ב- $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

תשובות סופיות:

1) $2\hat{x}-3\hat{y}-4\hat{z}$

2) א. לתוך הדף ב. למעלה ג. $\longrightarrow$

3) א. שמאלית ב. שמאלית

4) א. לתוך הדף ב. למעלה ג. $\longrightarrow$

5) א. $\vec{r}_1=(3\,,-1\,,0)$ ב. $|\vec{r}_2|=\sqrt{30}$, $|\vec{r}_1|=\sqrt{10}$ ג. $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{59}\text{c.m}^2$

ד. $\tilde{h}=0.13\text{c.m}$

גוף קשיח

פרק 3 - מרכז מסה

תוכן העניינים

1. הסבר בסיסי על מרכז מסה 26
2. דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור 27
3. תנועה לפי הכוחות החיצוניים .... (ללא ספר)
4. שני תרגילים 28
5. תרגילים מסכמים 29

הסבר בסיסי על מרכז מסה:

שאלות:

1) **דוגמה - מרכז מסה של שני מוטות בזווית**

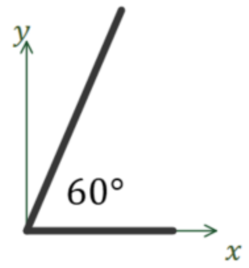
המערכת המתוארת באיור מורכבת משני מוטות בעלי צפיפות אחידה.

מוט ראשון באורך 3c.m נמצא לאורך ציר ה- x

ומסתו 2kg, מוט שני נמצא בזווית $60°$ עם ציר ה- x

החיובי אורכו 5c.m ומסתו 3kg.

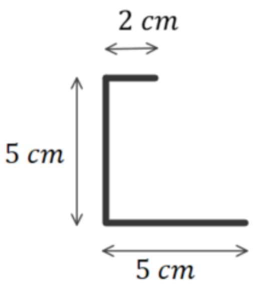
מצא את מרכז המסה של המערכת (ביחס לראשית).



2) **דוגמה - מרכז מסה של האות נ**

המערכת המתוארת באיור מורכבת ממוט בעל צפיפות מסה אחידה המכופף בצורת האות "נ" בתמונת מראה.

מצא את מיקום מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה השמאלית התחתונה.



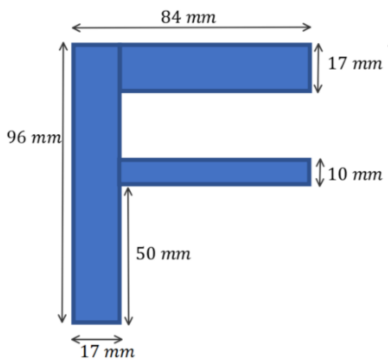
3) **דוגמה - מרכז מסה של F**

מרכיבים את האות F מלוחות בעלי צפיפות מסה אחידה ליחידת שטח.

המימדים של כל הלוחות נתונים באיור.

א. מצא את מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה השמאלית התחתונה של האות.

ב. מהו מרכז המסה של המערכת ביחס לפינה הימנית התחתונה של האות?



תשובות סופיות:

1) $x_{c.m} = 1.35c.m \quad , \quad y_{c.m} = 1.3c.m$

2) $x_{c.m} = 1.2c.m \quad , \quad y_{c.m} = 1.875c.m$

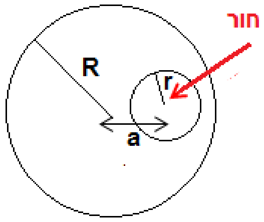
3) א. $x_{c.m} = 31mm \quad , \quad y_{c.m} = 62mm$ ב. $x_{c.m} = 14mm \quad , \quad y_{c.m} = 62mm$

דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור:

שאלות:

1) דוגמה מרכז מסה של דיסקה עם חור

בדסקה בעלת רדיוס R ומסה M קדחו חור עגול בעל רדיוס r במרחק a ממרכז הדסקה. הנח כי צפיפות המסה אחידה בכל הדסקה.
מצא את מרכז המסה של הדסקה עם החור.



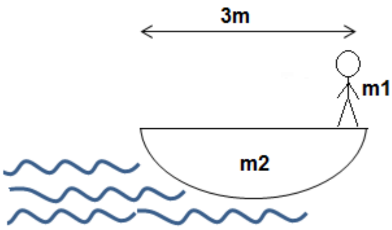
תשובות סופיות:

1) $$x_{\text{c.m.}}=\frac{-a\left(\rho\pi r^2\right)}{\mathrm{M}-\left(\rho\pi r^2\right)}$$

שני תרגילים:

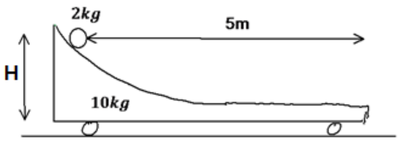
שאלות:

1) נער על סירה



אדם עומד בקצה סירה באורך 3 מטר.
מסת האדם היא 70 קילוגרם ומסת
הסירה 100 קילוגרם.
האדם התקדם 2 מטרים לאורך הסירה.
כמה זזה הסירה?
(הזנח את החיכוך בין המים לסירה).
נתון: $m_1=70\text{kg}$, $m_2=100\text{kg}$.

2) כדור על קרונית



כדור מונח על קרונית משופעת הנמצאת במנוחה.
הכדור מונח בגובה $H=1\text{m}$ ובמרחק של 5m מטר
מקצה הקרונית.
מסת הקרונית: $m_1=10\text{kg}$, מסת הכדור: $m_2=2\text{kg}$.

א. מצא את העתק הקרונית כאשר הכדור מגיע לקצה.
ב. מצא את מהירות הגופים אם נתון שמהירות הכדור בקצה הקרונית היא רק בכיוון ציר ה- x.

תשובות סופיות:

1) $x=\frac{14}{17}\text{m}$

2) א. $\Delta x_1=-\frac{10}{12}\text{m}$ ב. $u_1\approx-0.82\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $u_2\approx4.08\frac{\text{m}}{\text{sec}}$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

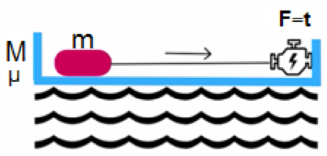
1) שני גופים מחוברים בקפיץ נלחצים לקיר

שני גופים מחוברים בקפיץ בעל קבוע k ונמצאים על משטח אופקי חסר חיכוך.
מסת הגוף הימני היא m_1, מסת הגוף השמאלי היא m_2 והוא צמוד לקיר.
האורך הרפוי של הקפיץ הוא l_0.

לוחצים את הגוף הימני עד שהקפיץ מתכווץ לאורך $\frac{l_0}{3}$ ומשחררים ממנוחה.

א. מתי תתנתק המסה השמאלית מהקיר?
ב. מהו מיקום מרכז המסה כתלות בזמן?

2) מנוע מושך מסה בסירה

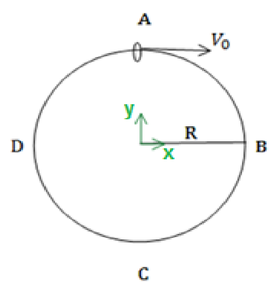


על סירה (ללא חיכוך עם המים) מונחת מסה.
המסה מחוברת בחוט למנוע המחובר לסירה.
כוח המשיכה של המנוע משתנה בזמן,
מקדם החיכוך הסטטי ומקדם החיכוך הקינטי נתונים.

א. מתי תתחיל לנוע המסה?
ב. מה תהיה תאוצת מרכז המסה? תאוצת הסירה? תאוצת המסה?
ג. לאחר שהמסה נעה החוט ניתק. ענה שוב על סעיף ב'.
ד. האם המסה והסירה ייעצרו בו זמנית?

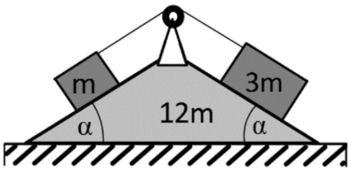
3) חרוז מסתובב על חישוק שחופשי לנוע

חישוק בעל רדיוס R ומסה m מונח על שולחן אופקי חלק.
על החישוק ישנו חרוז המתחיל לנוע מהנקודה A ומסתו m גם כן.
ב-$t=0$ החישוק נמצא במנוחה ומהירותו ההתחלתית של החרוז היא v_0 ימינה.



א. מצא את מיקום מרכז המסה של המערכת בתחילת התנועה.
ב. מצא את מהירות מרכז המסה כפונקציה של הזמן ואת מסלולה.
ג. מהן מהירויות החרוז והצינור כאשר החרוז נמצא בנקודות D , C , B ושוב ב-A ביחס לחישוק?

4) שני גופים על מדרון שנע

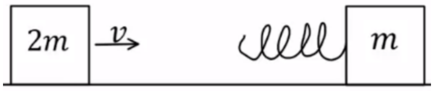


שני גופים בעלי מסות m ו- $3m$ נמצאים על מדרון דו-צדדי בעל זווית נטייה α משני צדדיו.
שני הגופים קשורים זה לזה בחוט אידיאלי דרך גלגלת אידיאלית המחוברת למדרון.
למדרון מסה $12m$ והוא יכול לנוע על הרצפה.
אין חיכוך בין הגופים למדרון ובין המדרון לרצפה.
משחררים את המערכת ממנוחה.

א. חשב את העתק המדרון, לאחר שהגוף הכבד עבר מרחק L במורד המדרון.
ב. מהי העבודה שביצע משקל הגוף הכבד ומשקל הגוף הקל במהלך התנועה?
ג. חשב את מהירות המדרון ביחס לרצפה ברגע זה.

5) מסה מתנגשת במסה עם קפיץ

גוף שמסתו $2m$ נע במהירות v על משטח חסר חיכוך לעבר גוף נוסף שמסתו m הנמצא במנוחה. בצידו השמאלי של הגוף במנוחה ישנו קפיץ רפוי בעל קבוע k.
הבעיה חד מימדית.



א. מהי מהירות מרכז המסה של הגופים?
ב. מהי ההתכווצות המקסימאלית של הקפיץ?

תשובות סופיות:

1) א. כאשר הקפיץ מגיע לנקודת רפיון או ב- $t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_1}{k}}$.

ב. $x_{c.m.}(d)=\frac{m_1 l_0}{m_1+m_2}\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{m_1 k}t\right)$

2) א. $\mu\cdot mg=t$ ב. $a=\frac{t}{m}\ ,\ -a=\frac{t}{M}$ ג. $a=\mu\cdot g\frac{m}{M}\ ,\ -a=\mu\cdot g$

ד. כן.

3) א. $y_{c.m.}(t=0)=\frac{R}{2}$ ב. $\vec{v}_{c.m.}(t)=\frac{1}{2}v_0\hat{x}$

ג. בנקודה B: $u_{1_x}=\frac{1}{2}v_0=u_{2_x}\ ,\ u_{1_y}=\frac{-v_0}{2}=-u_{2_y}$,

בנקודה C: $u_{1_y}=0=u_{2_y}\ ,\ u_{2_x}=v_0\ ,\ u_{1_x}=0$,

בנקודה D: $u_{1_x}=u_{2_x}=\frac{1}{2}v_0\ ,\ u_{1_y}=\frac{v_0}{2}=-u_{2_y}$

4) א. $x_2=-\frac{L\cos\alpha}{4}$ ב. הכבד: $W=3mgL\sin\alpha$, הקל: $W=mg(-L\sin\alpha)$

ג. $v_{2_x}=\sqrt{\frac{gL\sin\alpha}{4(4\tan^2\alpha+3)}}$

5) א. $v_{c.m.}=\frac{2}{3}v$ ב. $\Delta x_{max}=\sqrt{\frac{10m}{3k}}\cdot v$

גוף קשיח

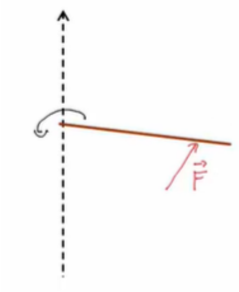
פרק 4 - מומנט כוח (סטטיקה של גוף קשיח)

תוכן העניינים

1. מכפלה וקטורית .... (ללא ספר)
2. מומנט כוח - הסבר 32
3. תרגיל - מומנטים על משולש 33
4. משוואת מומנטים .... (ללא ספר)
5. תרגיל - שני פועלים מחזירים מנשא 34
6. תרגילים מסכמים 35

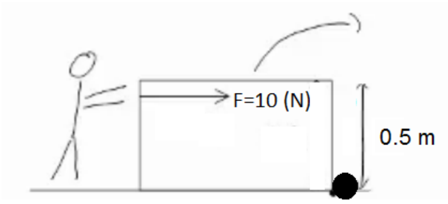
מומנט כוח - הסבר:

שאלות:



1) דוגמה לחישוב מומנט (מוט)

נתון מוט אשר מקובע בקצהו ומסתובב נגד כיוון השעון.
מופעל כוח F.
חשב את מומנט הכוח.



2) מרחק אפקטיבי דוגמה

אדם דוחף ארגז בגובה 0.5m ומפעיל כוח F
(ראה תמונה).
לארגז אין חיכוך עם המשטח.
האדם דוחף את הארגז ללא כל בעיה עד
שנתקע באבן והארגז מתהפך
(מיקום האבן הופך לציר הסיבוב).
חשב את מומנט הכוח.

תשובות סופיות:

1) $\vec{\tau} = F_0 \times \hat{z}$

2) $|\vec{\tau}| = 10 \cdot 0.5\text{m}$

תרגיל - מומנטים על משולש:

שאלות:

1) מומנטים על משולש

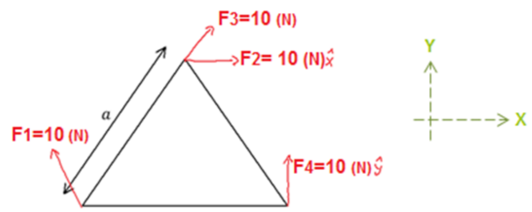
המשולש בתמונה הוא משולש שווה צלעות עם אורך צלע נתונה a.

א. חשב את המומנטים של הכוחות בתמונה סביב הפינה השמאלית של המשולש.

ב. נתונה המסה של המשולש M ונתון גם כי מרכז המסה של המשולש נמצא בנקי': $\left(\frac{1}{2}a\ ,\ \frac{1}{2\sqrt{3}}a\right)$.

חשב את מומנט הכוח של כוח הכובד.

ג. חשב שוב את המומנטים סביב ציר העובר במרכז המסה של המשולש, הנח כי הזווית בין F_1 לדופן המשולש היא 60 מעלות.



תשובות סופיות:

1) א. $\tau_1 = 0!\ ,\ \vec{\tau}_2 = -5\cdot\sqrt{3}a\ ,\ \vec{\tau}_3 = 0!\ ,\ \tau_4 = 10a$ ב. $\tau_g = -Mg\frac{1}{2}a$

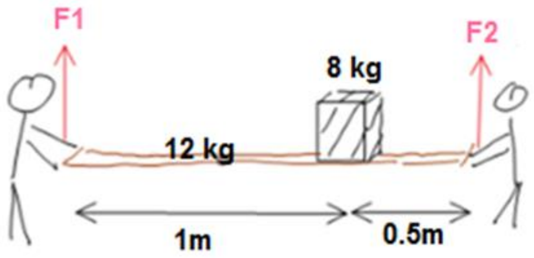
ג. $\tau_1 = \frac{-10a}{\sqrt{3}}\ ,\ \tau_2 = -10\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}a\ ,\ \tau_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}a\cdot 10\cdot\sin 30°\ ,\ \tau_4 = 10\cdot\frac{1}{2}a\ ,\ \tau_g = 0$

תרגיל - שני פועלים מחזיקים מנשא:

שאלות:

1) שני פועלים מחזיקים מנשא

שני פועלים מחזיקים מנשא מעץ שמסתו 12kg ואורכו 1.5m.
על המנשא, במרחק של 0.5m מהפועל הימני, מונח ארגז בעל מסה של 8kg.
בהנחה כי המערכת במנוחה, מצאו את הכוח שמפעיל כל פועל (ראה איור).



תשובות סופיות:

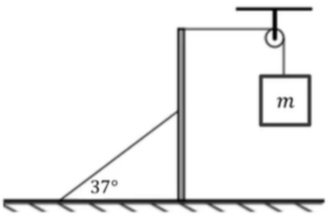
1) $F_2 = 113.333N$, $F_1 = 86.666N$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) מוט עומד מחובר לחוט ומשקולת

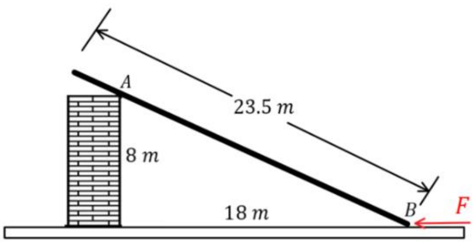
מוט אחיד מונח על משטח אופקי לא חלק, כמוראה בתרשים.
המוט מחובר במרכזו לחוט אידיאלי שקצהו
השני קשור למשטח ויוצר עימו זווית של $37°$.
הקצה העליון של המוט מחובר באמצעות חוט
אופקי אידיאלי וגלגלת אל משקולת שמסתה $m = 7kg$.
המערכת נמצאת במנוחה.



א. מהי המתיחות בחוט המחובר אל המשטח?
ב. מהו כוח החיכוך שמפעיל המשטח האופקי על המוט?

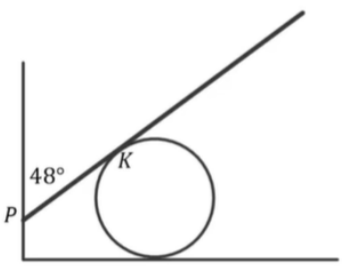
2) קורה על קיר אנכי

באיור לשאלה זו מתוארת קורה אחידה
שאורכה הכולל הוא $23.5m$.
מסת הקורה היא $140kg$.
הקורה נשענת בנקודה A על קיר אנכי חלק
שגובהו $8m$.
קצה הקורה מונח על הרצפה בנקודה B במרחק $18m$ מהקיר
ובקצה הזה פועל כוח אופקי F, כמתואר באיור.
מקדם החיכוך הסטטי שבין הקורה הרצפה הוא $\mu_s = 0.3$.
מהו F המקסימלי הניתן להפעיל כך שהקורה תישאר במנוחה?



3) מוט נשען על כדור

נתון מוט דק שאורכו $L = 3.5m$ ומסתו $m = 7kg$
הנשען על כדור חסר חיכוך המודבק לרצפה כמתואר בשרטוט.
נקודת המגע של המוט בכדור היא הנקודה K.
בקצהו השמאלי נוגע המוט בקיר בעל חיכוך
בנקודה P, הזווית שיוצר המוט יחסית לקיר
היא $48°$. מקדם החיכוך הסטטי שבין הקיר למוט
הוא $\mu_s = 0.15$.



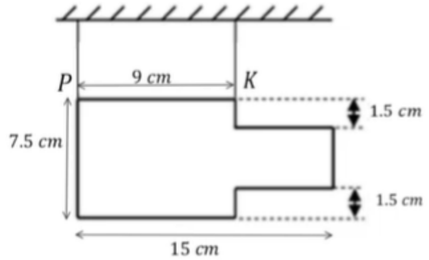
א. מהו הכוח שמפעיל הכדור על המוט אם
נתון שקצהו הימני של המוט נמצא על סף תנועה כלפי מטה?
ב. מהו המרחק בין הנקודות P ו- K במצב זה?

4) טבלה מעץ

טבלה העשויה עץ בעלת עובי אחיד שמסתה 400 גר' וצורתה כמתואר בתרשים, תלויה בשני חוטים בנקודות K ו-P.

א. חשב את מרכז הכובד של הטבלה ביחס למערכת צירים שראשיתה ממוקמת בנקודה P.

ב. מצא את המתיחות בשני החוטים.

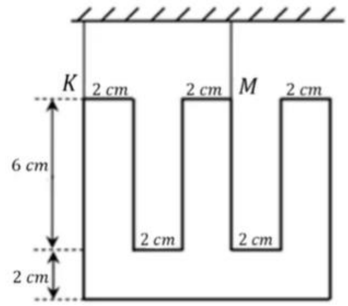


5) שלט בצורת האות ש

שלט העשוי מחומר אחיד בצורת האות "ש" (כמשורטט), שמסתו 4 ק"ג, נתלה בשני חוטים בנקודות K ו- M.

א. חשבו את מרכז המסה של השלט ביחס למערכת צירים שראשיתה ממוקמת בנקודה K.

ב. מצאו את המתיחות בשני החוטים.



6) מסה תלויה על קורה שמחוברת לקיר

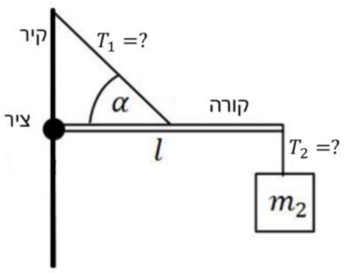
קורה בעלת מסה m_1 ואורך l מחוברת לקיר באמצעות ציר.

בקצה הקורה קשורה מסה m_2 התלויה במנוחה.

מאמצע הקורה יוצא חוט בזווית הקשור חזרה לקיר, הזווית שיוצר החוט עם הקורה היא α.

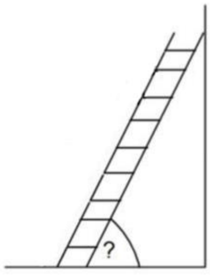
א. מהי המתיחות בחוטים?

ב. מהו הכוח (גודל וכיוון) שמפעיל הציר?

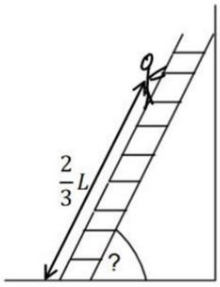


7) סולם נשען על קיר

סולם נשען על קיר.
קיים חיכוך סטטי בין הסולם לרצפה וגם בין הסולם לקיר.
מקדם החיכוך הסטטי בין הסולם לרצפה ובין הסולם לקיר הוא μ_s. אורך הסולם הוא L וניתן להניח שמסתו מפולגת בצורה אחידה.
מהי הזווית המינימלית עם הרצפה כך שהסולם לא יחליק?

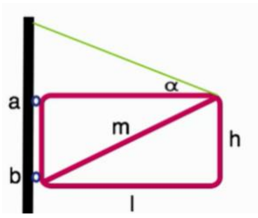


8) אדם עומד על סולם שנשען על קיר



אדם עומד על סולם שנשען על קיר.
אורך הסולם הוא L וניתן להניח שמסתו מפולגת בצורה אחידה. האדם עומד על הסולם כשמרחקו מהקצה התחתון של הסולם הוא שני שליש מאורך הסולם.
קיים חיכוך סטטי בין הסולם לרצפה וגם בין הסולם לקיר.
מקדם החיכוך הסטטי בין הסולם לרצפה ובין הסולם לקיר הוא μ_s. מסת האדם כפולה ממסת הסולם.
מהי הזווית המינימלית עם הרצפה כך שהסולם לא יחליק?

9) מומנטים על שער



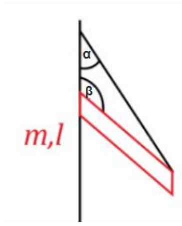
שער שגובהו h ואורכו l מחובר לקיר בשני צירים a ו- b.
על מנת להקל על הציר העליון חיברו לשער כבל ומתחו אותו עד אשר הכוח האופקי בנקודה a מתאפס.

א. מהי המתיחות בכבל?

ב. מהו הכוח האופקי הפועל על הציר b?

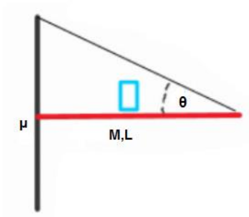
ג. מהו סכום הכוחות האנכיים המופעלים על שני הצירים?

10) גגון מוחזק אל קיר



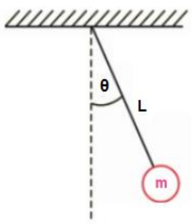
גגון מוחזק אל קיר בעזרת חבל וחיכוך כמתואר בשרטוט.
מצא את הכוחות הפועלים על הגגון.

11) מסה על גגון מחליק



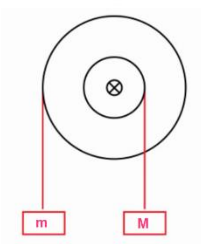
גגון מוחזק לקיר בעזרת חיכוך בלבד לפי הנתונים שבשרטוט.
מהו המרחק הקטן ביותר מהקיר בו ניתן לשים את המסה m מבלי לגרום לגגון להחליק מהקיר?

12) מטוטלת מתמטית



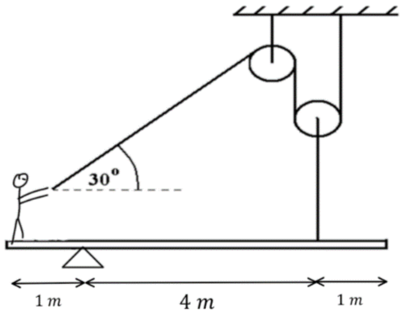
מצא את מומנט הכוח המופעל על מטוטלת מתמטית כפונקציה של הזווית מהאנך.

13) מנוף מדיסקה כפולה



נתונה המערכת שבשרטוט.
רשום את כל הכוחות הפועלים על הדיסקה ומצא את יחס הרדיוסים בין שתי הדיסקות.

14) אדם על קורה מחזיק בחוט ושתי גלגלות

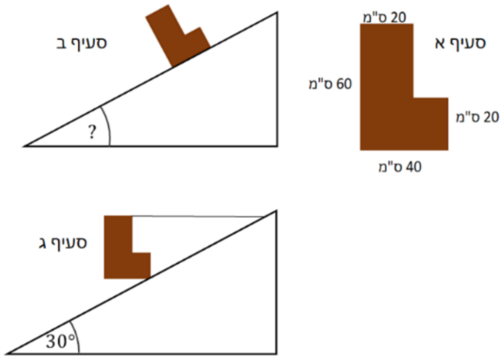


אדם שמסתו 65kg עומד בקצה קורה שמסתה 40kg.
הקורה מונחת על ציר הנמצא במרחק 1m מהאדם.
האורך הכולל של הקורה הוא 6m.
האדם מחזיק בחוט העובר דרך שתי גלגלות כפי שמתואר באיור.
הגלגלת השמאלית מחוברת לתקרה, הגלגלת הימנית לקורה במרחק 1m מהקצה השני.

א. מהו הכוח בו האדם צריך למשוך את החבל כדי לשמור על מצב של שיווי משקל?
ב. מהם רכיבי הכוח שהציר מפעיל על הקורה?
ג. מהו מקדם החיכוך הסטטי המינימאלי בין האדם לקורה כדי שהאדם לא יחליק מהקורה?

15) L על מישור משופע*

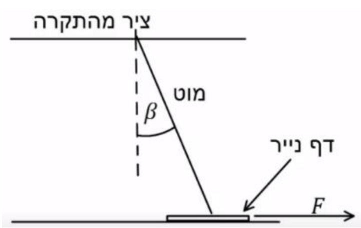
באיור נתון גוף משטחי בצורת L.
צפיפות המסה של הגוף היא: $\sigma = 5\frac{kg}{m^2}$.



א. מהו מרכז המסה של הגוף ביחס לפינה התחתונה השמאלית?
ב. מניחים את הגוף על מישור משופע. מהי הזווית המקסימאלית של המישור עבורה הגוף לא יתהפך?
ג. קושרים את הגוף למישור באמצעות חוט אופקי מהפינה הימנית העליונה ומותחים את החוט עד שהגוף מתיישר במקביל לקרקע.
מהי המתיחות בחוט במצב זה אם זווית המישור היא 30° והגוף במנוחה.

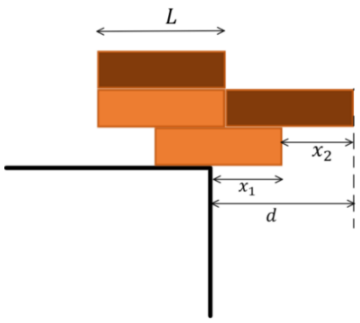
16) מוט נשען על דף נייר*

מוט בעל אורך L ומסה M מחובר לתקרה באמצעות ציר.
בקצהו השני המוט מונח על דף נייר המונח על הרצפה.
מסת דף הנייר זניחה.
הזווית בין המוט לאנך היא β ומקדם החיכוך הסטטי בין המוט לנייר ובין הנייר לרצפה הוא μ_s.



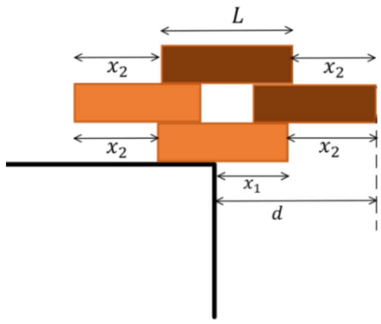
א. מושכים את הנייר ימינה בכוח F.
מהו הכוח המינימלי הדרוש בשביל להוציא את הנייר מתחת למוט? הנח שהמוט נשאר במנוחה.
ב. חזור על סעיף א' אם הכוח פועל שמאלה.

17) עֲרימת קוביות 1



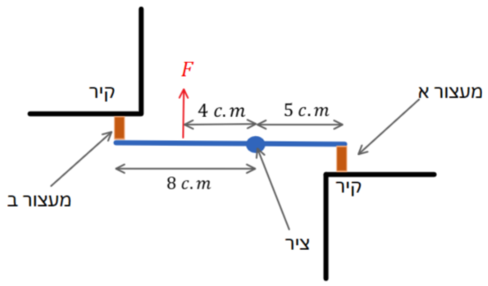
ערימת קוביות מורכבת מ-4 קוביות זהות באורך L.
הקוביות מסודרות באופן שמתואר באיור.
מהו המרחק d המקסימאלי האפשרי כך שהערימה לא תיפול מהשולחן.
מהם x_1 ו- x_2 במצב זה?

18) ערימת קוביות 2*



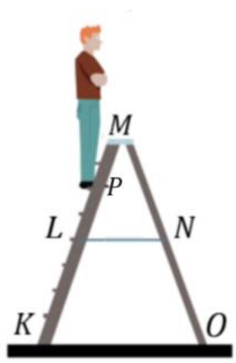
ערימת קוביות מורכבת מ-4 קוביות זהות באורך L.
הקוביות מסודרות באופן שמתואר באיור.
מהו המרחק d המקסימאלי האפשרי כך שהערימה לא תיפול מהשולחן.
מהם x_1 ו- x_2 במצב זה?

19) מוט עם שני מעצורים מגומי**



באיור ישנו מוט באורך 13c.m. המחובר
בציר הנמצא במרחק 5c.m. מהקצה הימני.
בשני הקצוות של המוט ישנם מעצורים
זהים העשויים מגומי.
מפעילים כוח $F = 200N$ במרחק 4c.m.
שמאלה מהציר, הכוח גורם לכיווץ קטן של המעצורים.
המערכת אופקית, כלומר כוח הכובד פועל לתוך הדף וניתן להתעלם ממנו.
מהו הכוח שפועל על כל מעצור?
רמז : התייחס למעצורים כמו קפיצים בעלי קבוע k זהה.

20) אדם על סולם עם שתי רגליים**



אדם עומד על סולם בעל שתי רגליים המחוברות באמצעות כבל במרכז הסולם. משקל האדם הוא 800 ניוטון וניתן להזניח את משקל הסולם ואת החיכוך עם הרצפה.
נתונים אורכי הקטעים הבאים :
$KM = OM = 2.34m$, $KP = 1.70m$, $LN = 0.746m$.

א. מצא את הכוחות שפועלים בנקודות O ו- K.
ב. מצאו את המתיחות בכבל.

רמז : יש לעשות משוואה רק על חלק מהסולם.

תשובות סופיות:

1) א. $T_2 \approx 180N$ ב. $f_s = T_1 = 70N$, ימינה.

2) $F_{max} \approx 521N$

3) א. $N_2 \approx 110N$ ב. $PK \approx 0.84m$

4) א. $x_{c.m.} = 6.6c.m.\ ,\ y_{c.m.} = 3.75c.m$ ב. $T_2 = 3N\ ,\ T_1 = 1N$

5) א. $x_{c.m.} = 5c.m.\ ,\ y_{c.m.} \approx 4.4c.m$ ב. $T_K = 6.7N\ ,\ T_M = 33.3N$

6) א. $T_1 = \dfrac{(m_1 + 2m_2)g}{\sin\alpha}\ ,\ T_2 = m_2 g$

ב. $\tan\theta = -\dfrac{m_2}{m_1 + 2m_2}\tan\alpha\ ,\ F = \sqrt{((m_1 + 2m_2)g\cot\alpha)^2 + (m_2 g)^2}$

7) $\tan\theta = \dfrac{1-\mu_s^2}{2\mu_s}$

8) $\tan\theta = \dfrac{11-7\mu_s^2}{18\mu_s}$

9) ראה סרטון.

10) ראה סרטון.

11) ראה סרטון.

12) $\sum\tau = -mgl\sin\theta + Tl\sin\theta = -mgl\sin\theta$

13) $\sum\tau = \dfrac{m}{M} = \dfrac{r}{R}$

14) א. $T_1 = 20N$ ב. $F_x = 10\sqrt{3}N\ ,\ F_y = 1000N$ שמאלה

ג. $\mu_{s_{min}} = 0.027$

15) א. $x_{c.m.} = 0.15m\ ,\ y_{c.m.} = 0.25m$ ב. $\alpha = 31^\circ$

ג. $T = 3.3N$

16) א. $F_{min} = \dfrac{\mu_s mg\sin\beta}{\sin\beta + \mu_s\cos\beta}$ ב. $F_{min} = \dfrac{\mu_s mg\sin\beta}{\sin\beta + \mu_s\cos\beta}$

17) $x_1 = \dfrac{5L}{8}\ ,\ x_2 = \dfrac{L}{2}\ ,\ d = \dfrac{9L}{8}$

18) $x_1 = \dfrac{L}{2}\ ,\ x_2 = \dfrac{2L}{3},\ d = \dfrac{7L}{6}$

19) $F_R \approx 45N\ ,\ F_L \approx 72N$

20) א. $N_O \approx 291N\ ,\ N_k = 509N$ ב. $T_L \approx 196N$

גוף קשיח

פרק 5 - מומנט התמד

תוכן העניינים

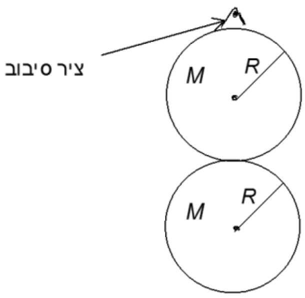
1. הקדמה - גוף קשיח וציר סיבוב .... (ללא ספר)
2. מומנט התמד, הסבר בסיסי וחישוב עבור גוף נקודתי .... (ללא ספר)
3. משפט שטיינר .... (ללא ספר)
4. אדטיביות 41
5. סימטריה לz .... (ללא ספר)
6. חישוב מומנט ההתמד של דיסקה סביב ציר Z וציר X .... (ללא ספר)
7. תרגילים שונים לחישוב מומנט התמד 42

אדטיביות:

שאלות:

1) דוגמה

לדסקה בעלת מסה M ורדיוס R מחברים דסקה נוספת זהה בקצה התחתון של הדסקה.
מצא את מומנט ההתמד של המערכת סביב ציר המאונך למישור הדסקה והעובר בקצה העליון של הדסקה (הראשונה).



תשובות סופיות:

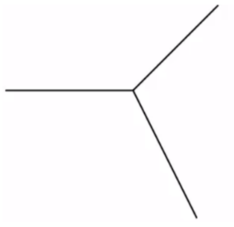
1) $I = 11mR^2$

תרגילים שונים לחישוב מומנט התמד:

שאלות:

1) שלושה מוטות מחוברים בקצה

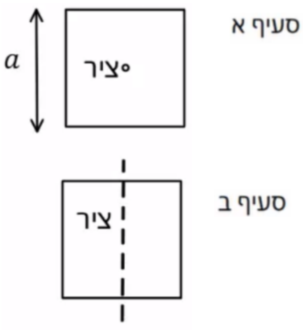
שלושה מוטות זהים באורך l ומסה m כל אחד מחוברים באופן המוצג באיור.
מצא את מומנט ההתמד של המערכת סביב ציר הנמצא בנקודת החיבור בין המוטות ובמאונך למישור.



2) מסגרת ריבועית

נתונה מסגרת ריבועית בעלת אורך צלע a ומסה M.
מצא את מומנט ההתמד של מסגרת.

א. סביב ציר העובר במרכזה ומאונך למישור המסגרת.
ב. סביב ציר העובר במרכז המסגרת ודרך מרכז שתי צלעות ומקביל לשתי הצלעות האחרות.

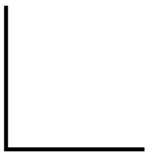


3) מומנט התמד של שער חשמלי

מצא את מומנט ההתמד של שער חשמלי בעל מסה m ואורך l אשר בסופו מחוברת משקולת בעלת מסה M ואורך L המסתובב סביב מרכז המסה שלו.

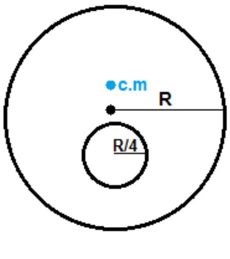
4) מומנט התמד של רייש

מצא את מומנט ההתמד של הגוף שבשרטוט סביב מרכז המסה שלו בשתי דרכים שונות. אורך כל מוט l ומסתו m.



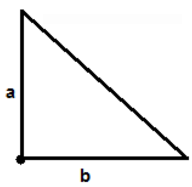
5) דיסקה עם חור

א. מצא את מומנט ההתמד של דיסקה בעלת מסה M ורדיוס R, אם ידוע כי במרחק חצי R ממרכז הדיסקה קדחו חור ברדיוס רבע R.
הדיסקה מסתובבת סביב ציר במרכזה (ולא במרכז המסה של המערכת).
ב. מצא את מומנט ההתמד של הגוף סביב מרכז המסה שלו.



6) מומנט התמד של משולש

מצא את מומנט ההתמד של המשולש סביב קודקודו הישר.



תשובות סופיות:

1) $I_{c.m.}=ml^2$

2) א. $I_{c.m.}=\frac{M}{4}\left(\frac{l^2}{3}+a^2\right)$ ב. $I=\frac{M}{8}\left(a^2+\frac{l^2}{3}\right)$

3)
$$I=\left(\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{m\cdot 0+\frac{M(l+L)}{2}}{m+M}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{12}\left(L^2+L^2\right)M+M\left(\frac{l}{2}-\left(\frac{m\cdot 0+\frac{M(l+L)}{2}}{m+M}\right)+\frac{L}{2}\right)^2\right)$$

4) $I=\frac{5}{12}ml^2$

5) א. $I_0=\frac{247}{512}MR^2$ ב. $I_0=I_{c.m.}+\frac{15}{16}M\cdot\left(\frac{R}{30}\right)^2$

6) $I_0=\frac{1}{6}m\left(a^2+b^2\right)$

גוף קשיח

פרק 6 - גוף קשיח

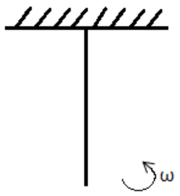
תוכן העניינים

1. הגדרות, ציר סיבוב ותנע קווי .... (ללא ספר)
2. אנרגיה סיבובית של גוף קשיח 44
3. ניתוח לפי כוחות ומומנטים וגלגול ללא החלקה 45
4. גלגול עם החלקה 47
5. תרגילים מסכמים 48

אנרגיה סיבובית של גוף קשיח:

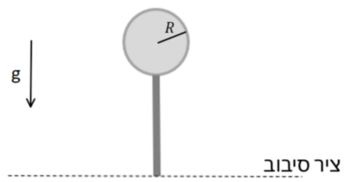
שאלות:

1) מוט מסתובב



מוט באורך L ומסה M מחובר לתקרה באמצעותציר ויכול להסתובב.
למוט מהירות זוויתית התחלתית ω.
מהי הזווית המקסימאלית אליה יגיע המוט?

2) דיסקה מחוברת למוט נופלת ממצב אנכי



גוף קשיח מורכב ממוט בעל אורך L ומסה M המחובר
בקצה אחד לדיסקה מלאה בעלת מסה m המפולגת
באופן אחיד ורדיוס R.
בקצה השני, המוט מחובר לציר אופקי.
המוט חופשי להסתובב סביב הציר (כלומר הגוף יכול לעשות סיבוב אנכי סביב הציר).
הגוף מתחיל מהמצב המתואר באיור (מצב אנכי לא יציב) ומקבל דחיפה קטנה לתוך הדף.
מה תהיה המהירות הזוויתית של הגוף כאשר יגיע לנקודה הנמוכה ביותר?

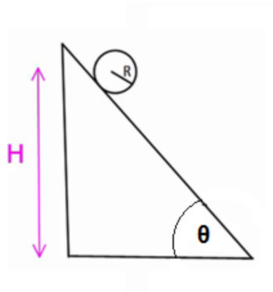
תשובות סופיות:

1) $\cos\theta = 1 - \frac{L\omega_0^2}{3g}$

2) $\omega = \sqrt{\frac{2MgL + 2mg(L+R)}{\frac{ML}{3} + \frac{1}{4}mR^2 + m(L+R)^2}}$

ניתוח לפי כוחות ומומנטים וגלגול ללא החלקה:

שאלות:

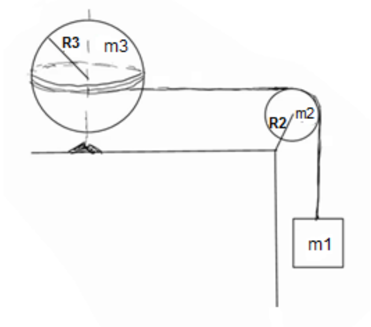


1) דוגמה - כדור על מדרון משופע

כדור בעל רדיוס R מונח בגובה H על מדרון משופע בעל זווית α. הכדור מתחיל להתגלגל ללא החלקה.

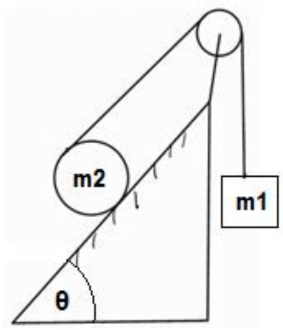
א. מצאו את מהירות הכדור בתחתית המדרון.

ב. מצאו את תאוצת הכדור.



2) גלובוס

גלובוס (כדור) מונח ומקובע לשולחן ויכול להסתובב סביב ציר המאונך לשולחן.
מלפפים חוט סביב מרכז הגלובוס (סביב קו המשווה) והחוט ממשיך מהגלובוס דרך גלגלת לא אידיאלית למסה תלויה m_1.
נתונים גם: m_2 ו- R_2 מסה ורדיוס הגלגלת, m_3 ו- R_3 מסה ורדיוס הגלובוס.
המערכת מתחילה ממנוחה.
מצא את תאוצת כל הגופים, קווית וזוויתית ואת המתיחות בחוט.



3) יויו במישור מחובר למסה

יויו (כדור שמלופף סביבו חוט) בעל מסה m_2 ורדיוס R מונח על מישור משופע בעל זווית θ.
החוט של היויו מחובר דרך גלגלת אידיאלית למסה m_1.
נתון כי היויו מתגלגל ללא החלקה על המישור וכי קיים חיכוך בין היויו למישור.

א. מצא לאן תנוע המערכת וכיוון החיכוך הסטטי.

ב. מצא את תאוצות הגופים וגודל כוח החיכוך.

4) מוט אופקי נופל

מוט בעל מסה M (צפיפות אחידה) ואורך L תלוי בקצהו לקיר וחופשי להסתובב סביב נקודת התלייה.
משחררים את המוט ממצב אופקי.

א. מצא את התאוצה הזוויתית ואת תאוצת מרכז המסה של המוט ברגע השחרור.

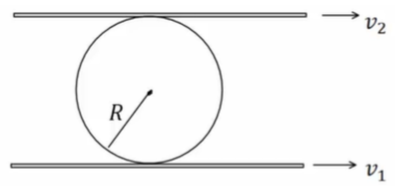
כעת המוט נופל עד להגיעו למצב מאונך לקרקע.

ב. מצא את הכוח שמפעיל הציר שמחבר את המוט לקיר על המוט, ברגע השחרור.

ג. מצא את המהירות הזוויתית של המוט ברגע זה (כשהוא מאונך לקרקע).

ד. חזור על סעיפים א' ו-ב' עבור רגע זה.

5) משטח מלמעלה ומשטח מלמטה



כדור בעל רדיוס R לחוץ בין שני משטחים נעים.
המשטח מתחת לכדור נע במהירות v_1 והמשטח מעליו נע במהירות v_2.

א. מהי מהירות מרכז המסה של הכדור אם ידוע שהוא מתגלגל ללא החלקה ביחס לשני המשטחים?

ב. חזור על סעיף א' אם המשטח העליון נע בכיוון ההפוך.

תשובות סופיות:

1) א. $mgH = \frac{1}{2}mv_{c.m.}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v_{c.m.}}{R}\right)^2$ ב. $a = \frac{5}{7}g\sin\theta$

2) ראה סרטון.

3) ראה סרטון.

4) א. $\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L}$, $a_x = a_r = 0$, $a_{c.m.} = \frac{3}{4}g = a_y$ ב. $\sum F_x = ma_{x_{c.m.}}$, $\sum F_y = ma_{y_{c.m.}}$

ג. $mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2$

ד. $\alpha=0$, $a_y = a_r = -\omega^2\frac{L}{2}$, $a_\theta = 0 = a_{x_{c.m.}}$, $\sum F_x = ma_{x_{c.m.}}$, $\sum F_y = ma_{y_{c.m.}}$

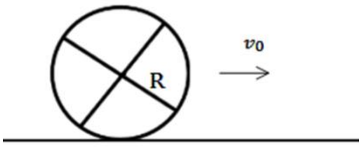
5) א. $v_{c.m.} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ ב. $v_{c.m.} = \frac{v_1 - v_2}{2}$

גלגול עם החלקה:

שאלות:

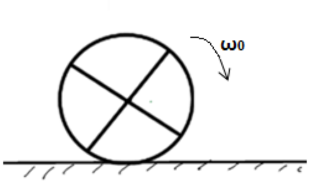
1) כדור מחליק ללא סיבוב

כדור הומוגני בעל מסה M מתחיל תנועתו עם
מהירות V_0 ללא סיבוב (מהירות זוויתית).
מצא את מהירותו הסופית אם נתון מקדם החיכוך הקינטי.



2) כדור מסתובב מונח על רצפה

כדור הומוגני בעל מסה M מוחזק באוויר ומסתובב
סביב מרכז המסה שלו במהירות זוויתית ω_0.
הכדור מונח על הרצפה בעודו מסתובב.
מצא את מהירותו הסופית אם נתון מקדם החיכוך הקינטי μ_k.



תשובות סופיות:

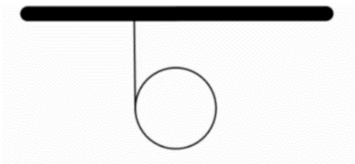
1) $V_{final}=\frac{5}{7}V_0$

2) $V_{final}=\frac{2}{7}\omega_0 R$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) חישוק מתגלגל מחבל

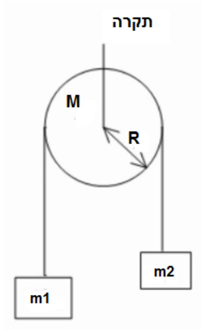


חבל מלופף סביב חישוק בעל רדיוס R ומסה m.
(החבל מחובר לתקרה).

א. מהי תאוצת מרכז המסה של החישוק?

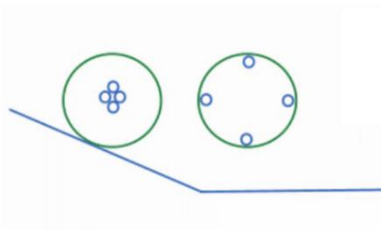
ב. לאחר כמה זמן ירד החישוק גובה של h אם התחיל תנועתו ממנוחה?

2) מסות וגלגלת



שתי מסות שונות m_2 , m_1 תלויות משני הצדדים
של גלגלת לא אידיאלית המקובעת במרכזה.
המסות משוחררות ממנוחה.
מצא את תאוצת המסות אם נתון:
M מסת הגלגלת, R רדיוס הגלגלת
וכי החוט אינו מחליק על הגלגלת.

3) שתי דיסקות שונות במדרון



בגן המדע שבמכון ויצמן יש שתי דסקות קלות
אליהן מודבקות 4 מסות כבדות כמתואר בשרטוט.
את הדסקות מניחים על שני מדרונים ובודקים מי
תנוע בהגיעה למישור מהר יותר.
הסבר כיצד ניתן לחשב מהירות זו על פי נתוני המערכת.

4) שני חישוקים מתגלגלים מחבל

חישוק בעל מסה m ורדיוס R תלוי מחבל המלופף סביבו.

א. מה תהיה מהירותו לאחר שנפל מגובה h?
מה תהיה תאוצתו? כמה זמן תארך הנפילה?

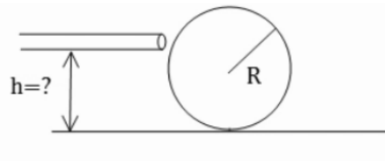
חישוק אחר חסר מסה בעל רדיוס R מכיל מסה נקודתית
במרכזו בעלת מסה m.

ב. מה תהיה מהירותו לאחר שנפל מגובה h?

ג. מה תהיה מהירותו אם החבל יהיה ללא חיכוך?

5) מכה בכדור ללא החלקה

כדור סנוקר ברדיוס R נמצא במנוח על שולחן ללא חיכוך (חיכוך נמוך מאוד).
מצא באיזה גובה מעל תחתית הכדור יש לתת מכה אופקית עם המקל כך שהכדור יתגלגל ללא החלקה.



מומנט ההתמד של הכדור הוא: $I_{c.m}=\frac{2}{5}mR^2$

הדרכה: ערוך תרשים כוחות ונתח את הבעיה בשלב המכה עצמה.

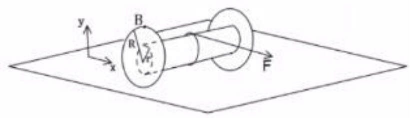
6) חוט מושך דיסקה ללא החלקה - תרגיל פשוט

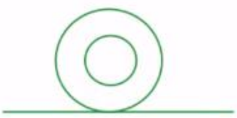
חוט מלופף מסביב לגליל המונח על מישור שאינו חלק. רדיוס הגליל הוא R ומסתו M.
כוח F נתון מושך את הגליל.
מצא את תאוצת הגליל במקרים הבאים אם ידוע שהגליל מתגלגל ללא החלקה:

א. הכוח פועל בכיוון אופקי.
ב. הכוח פועל בזווית θ ביחס לאופק וידוע שהגליל אינו מתרומם.
ג. מה כיוון החיכוך בכל מקרה?

7) יויו מתגלגל (חוט מלמעלה)

יויו מורכב מגליל ברדיוס r ומסה m.
משתי צידי הגליל מחוברות דסקות ברדיוס $R>r$ ומסה M כל אחת.
סביב הגליל ובמרכזו מלופף חוט.
היויו מונח על משטח לא חלק ומושכים את החוט בכוח F קבוע בכיוון ציר ה-x.
נתון כי היויו מתחיל את תנועתו ממנוחה וכי הוא מתגלגל ללא החלקה (היויו זז בציר ה-x).
כמו כן כל אות בגוף השאלה נתונה.





א. מהו מומנט ההתמד של היויו?
ב. מהי תאוצת מרכז המסה של היויו?
ג. מהו מיקום היויו כפונקציה של הזמן?
ד. הנקודה B נמצאת על קצה הגלגל ובדיוק מעל מרכזו ב-$t=0$.
מצא את מיקום הנקודה כתלות בזמן.

8) עיפרון נופל*

עיפרון באורך L ניצב אנכית על משטח.
ברגע מסוים הוא מתחיל ליפול ימינה.
כאשר הזווית בינו לבין האנך למשטח מגיעה ל- θ_1 העיפרון מתחיל להחליק.

א. עבור זוויות θ שבהן עדיין אין החלקה $\theta < \theta_1$.

i. מצאו את המהירות הזוויתית של העיפרון ω.

ii. מצאו את התאוצה הזוויתית של העיפרון α.

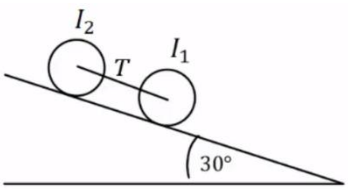
iii. מצאו את התאוצה הקווית של מרכז המסה של העיפרון.

iv. מצאו את גודלו וכיוונו של כוח החיכוך.

v. מצאו את הכוח הנורמלי.

ב. מצאו את מקדם החיכוך הסטטי μ_s.

9) שני גלילים מחוברים בחוט על מדרון משופע*



שני גלילים בעלי מסה $m = 3kg$ ורדיוס $R = 20c.m$ כל אחד, מחוברים בחוט אידיאלי ומתגלגלים יחד ללא החלקה במורד מדרון. זווית המדרון היא $30°$.
התפלגות המסה של הגלילים אינה אחידה ומומנטי ההתמד שלהם סביב מרכז המסה נתונים : $I_1 = 50kg \cdot cm^2$, $I_2 = 90kg \cdot cm^2$.
מהי המתיחות בחוט המחבר בין הגלילים?

תשובות סופיות:

1) א. $a=\frac{g}{2}$ ב. $t=\sqrt{\frac{4h}{g}}$

2) $a=\frac{(m_1-m_2)g}{\frac{1}{2}M+m_1+m_2}$

3) ראה סרטון.

4) א. $t=\frac{1}{2}\left(\frac{g}{2}\right)t^2$, $a=\frac{g}{2}$, $mgh=mv^2$ ב. $mgh=\frac{1}{2}mv'^2$ ג. נפילה חופשית.

5) $h=\frac{2}{5}R$

6) א. $a=\frac{4}{3}\frac{F}{m}$ ב. $a=\frac{4}{3}\frac{F}{m}$ ג. $\frac{1}{3}F$, $F\frac{1}{3}(1+\cos\varphi)$

7) א. $I=2\frac{1}{2}MR^2+\frac{1}{2}mr^2$ ב. $F+\frac{Fr-I\frac{a}{R}}{R}=(m+2M)(a)$

ג. $x_{(t)}=\frac{1}{2}at^2$ ד. $B_x=\frac{1}{2}at^2+R\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)$, $B_y=R\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)$

8) א.i. $\omega=\sqrt{3\frac{g}{L}(1-\cos\theta)}$ ii. $\alpha=\frac{3g}{2L}\sin\theta$ iii. $\vec{a}=-\omega^2 r\hat{r}+\alpha r\hat{\theta}$

iv. $\sum F_x=m(-a_r\sin\theta+a_\theta\cos\theta)$ v. $\sum F_y=m(-a_r\cos\theta-a_\theta\sin\theta)$

ב. $f_{s_{max}}(\theta_1)=\mu_s N(\theta_1)$

9) $T\approx 0.22N$